

# Sophia Girls' College, Ajmer

(Autonomous)

Semester II – 2015- 16

End Semester Examination – II

Class : B.Sc.[Math] – SEM II

(Sub : Math)

Paper I : [MAT-201]: Vector Calculus and Geometry – I

Time : 2 Hrs.

M.M: 70 Marks

## Section A

[10 Marks]

Section A contains 10 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt all 10 questions, at least 3 questions from each unit. Each question is of one mark.

### I. Answer the following questions

1. If  $r = |\vec{r}|$ , where  $\vec{r} = xi + yj + zk$ . Prove that

$$\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

यदि  $r = |\vec{r}|$  जहाँ  $\vec{r} = xi + yj + zk$  सिद्ध कीजिए

$$\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Define directional Derivative.

दिक् अवकलज को परिभाषित कीजिए |

2. Define curl of a vector point function.

सदिश फलन के कर्ल को परिभाषित कीजिए |

3. State Stoke's Theorem.

स्टोक्स प्रमेय का कथन लिखिए |

4. Define Line Integral.

रेखा समाकल को परिभाषित कीजिए |

5. Define conic section.

शांकव को परिभाषित कीजिए |

6. Write equation of the conic referred to centre as origin.

मूल बिन्दु को केन्द्र मानते हुए शांकव का समीकरण लिखिए |

7. Find the equation of sphere whose centre is  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$  and radius is 2.

गोले का केन्द्र  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$  तथा त्रिज्या 2 इकाई लेते हुए समीकरण ज्ञात कीजिए |

8. Define cone and right circular cone.

शंकु एवं लम्बकोणीय शंकु को परिभाषित कीजिए |

9. Define reciprocal cone.

व्युत्क्रम शंकु को परिभाषित कीजिए |

## Section B

[15 Marks]

Section B contains 7 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt 5 questions, at least 1 from each unit. Each question is of 3 marks.

### II. Answer the following questions

#### UNIT I

10. If  $\vec{r} = xi + yj + zk$  and  $\vec{a}$  is any constant vector then prove that

$$\text{curl} \frac{axr}{r^3} = -\frac{a}{r^3} + \frac{3(a \cdot r)r}{r^5}$$

यदि  $r = xi + yj + zk$  एवं  $\vec{a}$  व एक अचर सदिश है

तो सिद्ध कीजिए  $\text{curl} \frac{axr}{r^3} = -\frac{a}{r^3} + \frac{3(a \cdot r)r}{r^5}$

11. Prove that  $\text{div}(a \times b) = b \cdot \text{curl} a - a \cdot \text{curl} b$

सिद्ध किजिए  $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{curl } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{b}$

12. Evaluate  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , where  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$  and curve  $C$  is the rectangle in the  $xy$  plane bounded by  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$ ,  $y=b$   
 ज्ञात कीजिए  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , जहाँ  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$  तथा वक्र  $C$ ,  $xy$  समतल में  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$ ,  $y=b$  द्वारा दिया गया आयत है |

### UNIT II

13. Find the co ordinates of the centre of the conic. Also find the equation of the conic referred to the centre as origin in the standard form.  
 निम्न शांकव का केन्द्र ज्ञात कीजिए एवं शांकव का केन्द्र मूल बिन्दु लेते हुए समीकरण ज्ञात कीजिए  
 $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$
14. Trace the parabola  
 निम्न वक्र का चित्रण कीजिए |  
 $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$

### UNIT III

15. A plane passes through a fixed point  $(a,b,c)$  and cut the axes in  $A,B,C$ . Show that the locus of the centre of the sphere  $OABC$  is  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$   
 एक समतल अक्षर बिन्दु  $(a,b,c)$  से गुजरता है तथा अक्षों को पर काटता है सिद्ध कीजिए कि गोले के केन्द्र का बिन्दु पथ है  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$
16. Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  and whose guiding curve is the ellipse  $x^2 + 2y^2 = 1$ ,  $z = 0$   
 उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका जनक  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  के समान्तर है तथा जिसका निर्देशक वक्र दीर्घवृत्त है  $x^2 + 2y^2 = 1$ ,  $z = 0$

Section C [45 Marks]

Section C – Answer any three questions (400 words each), selecting one from each unit. Each question is of 15 marks.

### III. Answer the following questions

#### UNIT I

17. a) A particle moves along the curve  $x=2t^2$ ,  $y=t^2 - 4t$ ,  $z=3t-5$ . Find the components of velocity and acceleration of the particle in the direction of the vector  $\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$  at  $t=1$ .  
 एक कण वक्र  $x=2t^2$ ,  $y=t^2 - 4t$ ,  $z=3t-5$  वेग व त्वरण के सदिश  $\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$  at  $t=1$  के अनुदिश पर घटक ज्ञात कीजिए |
- b) Prove that  
 सिद्ध कीजिए |  
 $\nabla^2 f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \frac{2}{r} f(\mathbf{r})$   
 Where  $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|$  and  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

#### OR

Verify Stoke's theorem for the function  $F = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$  where curve  $C$  is the unit circle in  $xy$  plane bounding the hemisphere.

$$Z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ  $F = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$  तथा  $C$  अर्द्धगोले को  $Z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  परिबद्ध करने वाला अर्द्धवृत्त है |

### UNIT II

18. A) Discuss the tracing of conic  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$   
 शांकव  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$  के चित्रण की विवेचना कीजिए |

#### OR

Find the asymptotes of the following hyperbolas and equation to their conjugate hyperbola  
 निम्न अतिपरवलय की अन्त स्पर्शी ज्ञात कीजिए एवं इसके संयुग्मी अतिपरवलय की समीकरण ज्ञात कीजिए

$$y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$$

### UNIT III

20.a) A sphere of constant radius  $r$  passes through the origin  $O$  and cuts the axis in  $A, B, C$ . Prove that the locus of the foot of the perpendiculars drawn from  $O$  to the plane  $ABC$  is given by

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 4r^2$$

एक गोला जिसकी त्रिज्या अक्षर  $r$  है, मूल बिन्दु से गुजरता है तथा  $A, B, C$  अक्षों को पर काटता है। सिद्ध कीजिए की मूल बिन्दु से समतल  $ABC$  पर डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है |

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 4r^2$$

b) Find the coordinates of the centre and radius of the circle

निम्न वृत्त की त्रिज्या व केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए |

$$x^2 + y^2 - 2y - 4z = 20, \quad x + 27 + 2z = 21$$

OR

Prove that the cone  $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$  may have three mutually perpendicular tangent planes if  $bc + ca + ab = f^2 + g^2 + h^2$

सिद्ध कीजिए कि शंकु  $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$  के तीन परस्पर लम्बवत स्पर्श तल है यदि  $bc + ca + ab = f^2 + g^2 + h^2$

Find the equation of Right circular cylinder whose generators are parallel to  $z$  axis and intersect the surfaces  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  and  $lx + my + nz = p$

लम्ब वृतीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका जनक  $z$  अक्ष के समांतर तथा सतह  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  तथा  $lx + my + nz = p$  को काटता है |

SOPHIA GIRLS COLLEGE, AMER

# Sophia Girls' College, Ajmer

(Autonomous)

Semester II – 2015- 16

End Semester Examination – II

Class : B.Sc.[Math] – SEM II

(Sub : Math)

Paper II: [MAT-202]: Calculus – I

Time : 2 Hrs.

M.M: 70 Marks

## Section A

[10 Marks]

Section A contains 10 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt all 10 questions. Each question is of one mark.

### I. Answer the following questions

- Write the lengths of polar tangent and polar sub tangent.  
ध्रुवी स्पर्शी तथा ध्रुवी अघः स्पर्शी की लम्बाई लिखिये |
- Write the condition for the existence of the asymptote.  
अनन्त स्पर्शी के अस्तित्व के लिए प्रतिबन्ध लिखिये |
- Write the coordinates of centre of curvature.  
वक्रता केन्द्र के निर्देशांक लिखिये |
- Write the condition for a point to be a point of inflexion.  
एक बिन्दु के नति परिवर्तन बिन्दु होने की शर्त लिखिये |
- Define partial differential coefficient.  
आंशिक अवकल गुणांक को परिभाषित कीजिए |
- If  $u = x^2$  and  $v = y^2$  then find the value of  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$   
यदि  $u = x^2$  तथा  $v = y^2$  तो  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  का मान ज्ञात कीजिए |
- Write the necessary conditions for  $f(a,b)$  to be an extreme value of  $f(x,y)$   
फलन  $f(x,y)$  के चरममान  $f(a,b)$  होने का आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिये |
- Show that  
प्रदर्शित कीजिए |  
$$\int_0^1 x^{n-1} (\log \frac{1}{x})^{m-1} dx = \frac{\sqrt{(m)}}{n^m}, m, n > 0$$
- Write double integral in polar coordinates.  
ध्रुवी निर्देशांकों में द्विसमाकल को लिखिये |
- State Liouville's extension of Dirichlet's Integral.  
डिरिचलेट समाकल का लिवेली व्यापकीकरण का कथन लिखिये |

## Section B

[10 Marks]

Section B contains 7 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt 5 questions, at least 1 from each unit. Each question is of 2 marks.

### II. Answer the following questions.

#### UNIT I

- Show that the chord of curvature through the pole for the curve  $p=f(r)$  is  $\frac{2f(r)}{f'(r)}$   
प्रदर्शित कीजिए कि वक्र  $p=f(r)$  की ध्रुव से गुजरने वाली वक्रता जीवा की लम्बाई  $\frac{2f(r)}{f'(r)}$  है |
- Find all the asymptotes of the following curve:  
निम्न वक्र की सभी अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए |  
 $(y-2x)^2(3x+4y) + 3(y-2x)(3x+4y) - 5 = 0$

#### UNIT II

- If  $u = \sin^{-1} \frac{x+2y+3z}{x^8+y^8+z^8}$  find the value of

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$$

यदि  $u = \sin^{-1} \frac{x+2y+3z}{x^8+y^8+z^8}$  तो  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$  का मान ज्ञात कीजिए |

14. Find the ratio of the difference between the radii of curvature at any two points of a curve and length of the arc of the evolute between the two corresponding points.  
किसी वक्र के किन्हीं दो बिन्दुओं पर वक्रता त्रिज्याओं का अन्तर तथा उसके केन्द्रज के संगत बिन्दुओं के बीच के चाप की लम्बाई का अनुपात ज्ञात कीजिए |

### UNIT III

15. If  $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$ , then find the value of p.  
यदि  $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$ , तो p का मान ज्ञात कीजिए |

16. Evaluate the following integral by changing the order of integration.  
निम्न समाकल का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए |

$$\int_0^1 \int_{e^x}^e \frac{dydx}{\log y}$$

17. Evaluate  
मान ज्ञात कीजिए |

$$\int_{-1}^1 \int_0^z \int_{x-z}^{x+z} (x+y+z) dx dy dz.$$

Section C [30 Marks]

Section C – Answer any three questions (400 words each), selecting one from each unit. Each question is of 10 marks.

III. Answer the following questions.

### UNIT I

18. Find all the asymptotes of the following curve:

निम्न वक्र की सभी अनन्त स्पर्शियों ज्ञात कीजिए |

$$(2x-3y+1)^2(x+y) = 8x-2y+9$$

- b. Find the angle of intersection of the following cardioids :

निम्न हृदयाम का प्रतिच्छेदन कोण ज्ञात कीजिए

$$r = a(1 + \cos \theta) \text{ and } r = b(1 - \cos \theta)$$

OR

- a. Show that the circle of curvature at the origin of the parabola  $y = mx + \left(\frac{x^2}{a}\right)$  is  $x^2 + y^2 = a(1+m)^2(y - mx)$ .

प्रदर्शित कीजिए कि मूल बिन्दु पर पखलव  $y = mx + \left(\frac{x^2}{a}\right)$  का वक्रता वृत्त

$$x^2 + y^2 = a(1+m)^2(y - mx) \text{ है |}$$

- b. Examine the nature of the origin on the following curve:

निम्न वक्र पर मूल बिन्दु की प्रकृति की जाँच कीजिए

$$x^7 + 2x^4 + 2x^3y + x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

### UNIT II

19. a. If  $x + y = 2e^\theta \cos \theta$  and  $x - y = 2ie^\theta \sin \theta$

$$\text{show that } \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

यदि  $x + y = 2e^\theta \cos \theta$  and  $x - y = 2ie^\theta \sin \theta$

तो प्रदर्शित कीजिए

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

- b. if  $u = x \sqrt{(1-y)^2} + y \sqrt{(1-x)^2}$ ;  $v = \sin^{-1} x \sin^{-1} y$

Show that  $u, v$  are functionally related and find the relationship.

$$\text{यदि } u = x \sqrt{(1-y)^2} + y \sqrt{(1-x)^2}; \quad v = \sin^{-1} x \sin^{-1} y$$

प्रदर्शित कीजिए कि  $u, v$  फलनीय संबंधित है तथा उसमें सम्बन्ध ज्ञात कीजिए |

**OR**

a. Find the envelope of the family of the following straight lines;  $\alpha$  being the parameter:

निम्न सरल रेखा के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जहाँ  $\alpha$  प्राचल है |

$$a \sec \alpha - b \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

b. Find the points where the function  $x^3 + y^3 - 3axy$  has maximum or minimum value.

उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ फलन  $x^3 + y^3 - 3axy$  का मान उच्चतम या न्यूनतम है |

**UNIT III**

20. Prove that

सिद्ध कीजिए

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6} dx = \frac{x}{3\sqrt{3}}$$

a.  $\sqrt{(-\frac{1}{2})}$

b.  $\int_0^1 \sqrt{(1-x)} dx$

**OR**

a. Change the order of integration in the following integral:

निम्न समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए

$$\int_0^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} f(x,y) dx dy$$

b. Evaluate

मान ज्ञात कीजिए

$$\iiint xyz dx dy dz,$$

Where region of integration is the complete ellipsoid :

जहाँ समाकल का क्षेत्र सम्पूर्ण दिर्घवृत्तज है

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

# Sophia Girls' College, Ajmer

(Autonomous)

Semester II – 2016- 17

End Semester Examination

Class : B.Sc [Maths]

Sub : Mathematics

Paper II : [MAT-202]: Calculus

Time : 2 ½ Hrs.

M.M: 70 Marks

Instruction : In case of any doubt, the English version of paper stands correct.

## Section A

[10 Marks]

Section A contains 10 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt all 10 questions. Each question is of one mark.

### I. Answer the following questions

1. Define Pedal equation.  
पदिक समीकरण की परिभाषा दीजिए
2. Define double point.  
द्विक बिन्दु की परिभाषा दीजिए
3. Write the formula to find the radius of curvature for Cartesian curves.  
कार्तीय वक्र के लिए वक्रता त्रिज्या ज्ञात करने का सूत्र लिखिए
4. Write the degree of homogenous function  
 $u = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$ .  
समघात फलन  $u = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$  की घात लिखिए
5. Define Envelope.  
अन्वालोप की परिभाषा लिखिए
6. Give the necessary and sufficient condition for  $f(a,b)$  to be a maximum value of  $f(x,y)$ .  
फलन  $f(x,y)$  के अधिकतम मान  $f(a,b)$  होने की आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए
7. Define Gamma Function.  
गामा फलन की परिभाषा दीजिए
8. Evaluate. मान ज्ञात कीजिए  $\int_0^\infty \sqrt{x} \cdot e^{-x^3} dx$
9. State Dirichlet's Integral for triple integral.  
त्रिसमाकलन के लिए फलन में सम्बन्ध लिखिए
10. Write down the relation between Beta and Gamma function.  
बीटा तथा गामा फलन में सम्बन्ध लिखिए

## Section B

[15 Marks]

Section B contains 6 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt 3 questions, at least 1 from each unit. Each question is of 5 marks.

### II. Answer the following questions

#### UNIT I

11. Find the Pedal equation of the parabola.

$$y^2 = 4a(x + a)$$

परवलय  $y^2 = 4a(x + a)$  का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए

OR

Find the asymptotes of the following curve:

निम्न वक्र के अन्ततस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए

$$x^3 + yx^2 - xy^2 - y^3 - 3x - y - 1 = 0$$

#### UNIT II

12. If यदि  $u = \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right)$  then show that. तब प्रदर्शित कीजिए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

OR

Find the envelope of the circles drawn upon the central radii of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  as diameter.

उन वृत्तों का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जो दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  की ध्रुवान्त रेखाओं को व्यास मानकर खींचे गए हैं

UNIT III

13. To show that प्रदर्शित कीजिए

$$\sqrt{m} \sqrt{m + 1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}; m \in Z$$

where  $m$  is positive. जहाँ  $m$  धनात्मक है

OR

Change the order of integration in the following double integral.

निम्न द्विसमाकलन में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिए  $\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{\sqrt{ax}} f(x, y) dx dy$

Section C

[45 Marks]

Section C – contains 6 questions. Answer any three questions (400 words each), selecting one from each unit. Each question is of 15 marks.

III. Answer the following questions.

UNIT I

14. Trace the following curve:

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए स्ट्रोफॉयड

$$y^2(a + x) = x^2(3ax)$$

OR

(a) Show that for the radius of curvature at a point  $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$  on the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \text{ is } \frac{3a}{2} \sin 2\theta.$$

सिद्ध कीजिए कि वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  के बिन्दु  $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$  पर वक्रता त्रिज्या  $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$  होती है

(b) Find the point of inflection of the curve  $y(a^2 + x^2) = x^3$ .

वक्र  $y(a^2 + x^2) = x^3$  के नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए

UNIT II

15. (a) If यदि  $u = x \sin^{-1} \frac{y}{x}$  then prove that (तब सिद्ध कीजिए)  $\frac{x^2 \partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2xy \partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(b) If यदि  $V = f(x - y, y - z, z - x)$  then prove that तब सिद्ध कीजिए

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

OR

(a) Find the envelope of the family of ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

When  $a + b = c$ ,  $c$  being a constant.

दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जबकि  $a + b = c$  जहाँ  $c$  अचर है

(b) Show the minimum value of the following function

is  $3a^2$ .

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न फलन का निम्न मान  $3a^2$  है:

$$u = xy + a^3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$



### UNIT III

15. (a) Prove that :- सिद्ध कीजिए की

$$\int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} \beta(m, n)$$

(b) Show that :- प्रदर्शित कीजिए की

$$\sqrt{n} \sqrt{1-n} = \frac{\pi}{\sin n \pi}$$

OR

(a) Evaluate :- मान ज्ञात कीजिए

$\int \int xy(x+y) dx dy$  over the area between the parabola  $y = x^2$  and line  $y = x$ .  
परवलय  $y = x^2$  तथा  $y = x$  के मध्य क्षेत्र पर

(b) Evaluate :- मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

*The End*

SOPHIA GIRLS COLLEGE, AJMER

# Sophia Girls' College, Ajmer

(Autonomous)

Semester II – 2016- 17

End Semester Examination – I

Class : B.Sc. Maths

Sub : Mathematic

Paper I : [MAT-201]:Vector Calculus and Geometry – I

Time : 2 ½ Hrs.

M.M: 70 Marks

Instruction : In case of any doubt, the *English* version of paper stands *correct*.

## Section A

[10 Marks]

Section A contains 10 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt all 10 questions. Each question is of one mark.

### I. Answer the following questions.

- Prove that A scalar point function  $f$  is constant iff  $\text{grad } f=0$ .  
सिद्ध कीजिए कि एक अदिश बिन्दु फलन  $f$  अचर है यदि  $\text{grad } f=0$  |
- If  $r = \left| \vec{r} \right|$  where  $\vec{r} = xi + yj + 2k$  prove that (सिद्ध कीजिए)  $\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$  |
- If  $\vec{r} = xi + yj + 2k$ , prove that  $\text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} = 3$   
यदि  $\vec{r} = xi + yj + 2k$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $\text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} = 3$  |
- State Gauss' theorem.  
गॉस प्रमेय का कथन लिखिए |
- Define conic section.  
शंकु परिच्छेद को परिभाषित कीजिए |
- Write polar equation of a straight line.  
सरल रेखा के ध्रुवीय समीकरण को लिखिए |
- Write equation of the directrix.  
निराता के समीकरण को लिखिए |
- Write equation of sphere in diameter form.  
व्यास रूप में गोले का समीकरण लिखिए |
- Define enveloping cone.  
अन्वलोपी शंकु को परिभाषित कीजिए |
- Define Right circular cylinder.  
लम्बवृत्तीय बेलन को परिभाषित कीजिए |

## Section B

[15 Marks]

Section B contains 6 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt 3 questions, at least 1 from each unit. Each question is of 5 marks.

### II. Answer the following questions

#### UNIT I

11. If  $\vec{r} = xi + yj + 2k$  and  $r = \left| \vec{r} \right|$ , prove (सिद्ध कीजिए) that  $\text{curl } \frac{\vec{r}}{r^n} = 0$ .

OR

Prove that सिद्ध कीजिए |  
 $\text{div}(ua) = u \cdot \text{div } a + a \cdot \text{grad } u$

#### UNIT II

12. (a) Find the co-ordinates of the centre of the following conic :

निम्न शंकव के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए |

(b) Find the equation of the following conic referred to centre as origin in the standard form:-

केन्द्र को मूल बिन्दु लेकर निम्न शंकव का मानक रूप ज्ञात कीजिए |

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

**OR**

Show that the latus rectum of the parabola  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$  is  $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

सिद्ध करो कि परवलय  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$  की नाभिलम्ब  $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  होती है |

### UNIT III

13. Two spheres of radii  $r_1$  and  $r_2$  cut orthogonally: Prove the radius of their common circle is.

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

$r_1$  तथा  $r_2$  त्रिज्या के दो गोले लाम्बिक रूप से काटते हैं सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या है |

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

**OR**

If  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  represent one of the three mutually perpendicular generators of then cone  $5yz - 8xz - 3xy = 0$  find the equation of the other two.

यदि  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  शंकु  $5yz - 8xz - 3xy = 0$  के तीन परस्पर समरूपिक जनकों में एक है तो अन्य दो जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए |

### Section C

[45 Marks]

*Section C contains 6 questions (400 words each) and a candidate is required to attempt 3 question, at least 1 from each unit. Each question is of 15 marks.*

III. Answer the following questions.

### UNIT I

14. (a) If  $f$  and  $g$  are scalar point function, then

Prove that

यदि  $f$  तथा  $g$  दो अदिश बिन्दु फलन हों तो सिद्ध कीजिए

$$\text{grad} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{g(\text{grad } f) - f(\text{grad } g)}{g^2}, g \neq 0$$

(b) Find the equation of the tangent plane and normal to the surface  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  at point  $(4, 0, 3)$ .

पृष्ठ  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  के बिन्दु  $(4, 0, 3)$  पर स्पर्श तल तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए |

**OR**

(a) If  $\vec{r} = xi + yj + 2k$  and  $r = \left| \vec{r} \right|$ , prove (सिद्ध कीजिए) that  $\text{div } r^n \vec{r} = (n + 3) \vec{r}$

(b) Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\int (yzdx + (xy + 1)dy + xyzdz)$$

Where  $c$  is any path from  $(1, 0, 0)$  to  $(2, 1, 4)$

जहां  $c$  बिन्दु  $(1,0,0)$  से  $(2,1,4)$  तक कोई पथ है |

### UNIT II

15. Find the nature of the conic represented by the equation  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$  and also trace it.

समीकरण  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$  द्वारा प्रदर्शित शांकव की प्रकृति ज्ञात कीजिए तथा इसका अनुरेखण भी कीजिए |

**OR**

Trace the curve. वक्र अनुरेखण कीजिए |

$$x^2 + y^2 + xy + x + y + 1 = 0$$

### UNIT III

16. (a) Find the equation of the sphere which passes through the points  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  and  $(0,0,1)$  and has its radius as small as possible.

बिन्दु  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  और  $(0,0,1)$  से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या न्यूनतम हो |

- (b) A sphere whose centre lies in the positive octant, passes through the origin and cuts the plane  $x = y = z = 0$  in circles of radii  $a\sqrt{2}$ ,  $b\sqrt{2}$ ,  $c\sqrt{2}$  respectively. Find its equation.

एक गोले का केन्द्र धन अष्टांशक में है और वह मूल बिन्दु से गुजरता है निर्देशी समतल  $x=y=z=0$  से इसका प्रतिच्छेद क्रमशः  $a\sqrt{2}$ ,  $b\sqrt{2}$ ,  $c\sqrt{2}$  त्रिज्या वाले वृत्त है इस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए |

**OR**

- (a) Find the enveloping cone of the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$  with its vertex at  $(1,1,1)$ .

गोले  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$  के उस अन्वालोपी शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष बिन्दु  $(1,1,1)$  है |

- (b) Find the equation of right circular cylinder whose guiding curve is the circle

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x - 2y + 2z = 3$$

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x - 2y + 2z = 3$  है |

**The End**

# Sophia Girls' College, Ajmer

(Autonomous)

Semester II – 2017- 18

End Semester Examination

Class : B.Sc. [Maths]

Sub : Mathematics

Paper I : [MAT-201]: Vector Calculus & Geometry

Time : 2 ½ Hrs.

M.M: 70 Marks

Instruction : In case of any doubt, the *English* version of paper stands *correct*.

## Section A

[10 Marks]

*Section A contains 10 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt all 10 questions. Each question is of one mark.*

### I. Answer the following questions

- Find the value of  $\nabla f$ , if  $f(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2$   
यदि  $f(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2$ ,  $\nabla f$  मान ज्ञात कीजिए।
- Define Divergence of a vectors and Solenoidal vector.  
सदिश का अपसरण व परिनलिका सदिश को परिभाषित कीजिए।
- Find the divergence of  $\vec{F}$ . where  $\vec{F} = xyz\hat{i} + 3x^2y\hat{j} + (xz^2 - y^2z)\hat{k}$   
 $\vec{F}$  का अपसरण ज्ञात कीजिए, जहाँ  $\vec{F} = xyz\hat{i} + 3x^2y\hat{j} + (xz^2 - y^2z)\hat{k}$
- State Green's theorem.  
ग्रीन प्रमेय का कथन लिखिए।
- Write the necessary conditions for conic  $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$  to represents an equation of ellipse.  
शाकव  $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$  एक दीर्घवृत्त के समीकरण को निरूपित करता है तो आवश्यक शर्तें लिखिए।
- Write polar equation of a circle.  
वृत्त की ध्रुवीय समीकरण को लिखिए।
- Write down the equation of axis of the conic  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$  in terms of the length  $r$  of its semi axis.  
शाकव  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$  के अर्ध-अक्ष की लम्बाई  $r$  के रूप उसके अक्ष की समीकरण लिखिए।
- Define Reciprocal cone.  
व्युत्क्रम शकू को परिभाषित कीजिए।
- Define Cylinder.  
बेलन को परिभाषित कीजिए।
- Find the centre and radius of the sphere  $7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 6x - 3y - 2z = 0$   
गोल  $7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 6x - 3y - 2z = 0$  का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

## Section B

[15 Marks]

*Section B contains 6 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt 3 questions, at least 1 from each unit. Each question is of 5 marks.*

### II. Answer the following questions

## UNIT I

11. If  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are constant vectors and  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  then show that :  $\text{curl} [(\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{b}] = \vec{b} \times \vec{a}$   
यदि  $\vec{a}$  व  $\vec{b}$  अचर सदिश है व  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  तो सिद्ध कीजिए कि  $\text{curl} [(\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{b}] = \vec{b} \times \vec{a}$

OR

Prove that :  
सिद्ध कीजिए कि—

$$\text{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

Where  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

## UNIT II

12. Find the condition so that the straight line  $\frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$  may touch the conic  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \alpha)$ .  
प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब कि सरल रेखा  $\frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$  शाकव  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \alpha)$  को स्पर्श करती हैं।

OR

What conic does equation  $13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$  represent? Find its centre and the equation to the conic referred to the centre as origin.

समीकरण  $13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$  कौनसे शाकव को निरूपित करता है? इसके केन्द्र के निर्देशांक तथा इसके केन्द्र को मूल बिन्दु मान कर शाकव का समीकरण ज्ञात कीजिए।

## UNIT III

13. Find the equation of the tangent line to the circle  $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 7y + 2z - 8 = 0, 3x - 2y + 4z + 3 = 0$  at the point  $(-3, 5, 4)$ .  
वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 7y + 2z - 8 = 0, 3x - 2y + 4z + 3 = 0$  के बिन्दु  $(-3, 5, 4)$  पर स्पर्श रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए।

OR

Find the equation of the sphere having the circle  $x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z = 8, x + y + z = 3$  as a great circle.

गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z = 8, x + y + z = 3$  एक वृहत वृत्त हो।

## Section C

[45 Marks]

Section C – contains 6 questions. Answer any three questions (400 words each), selecting one from each unit. Each question is of 15 marks.

III. Answer the following questions.

## UNIT I

14. Verify Gauss divergence theorem for  $\vec{F} = xy\hat{i} + z^2\hat{j} + 2yz\hat{k}$  on the tetrahedron  $x = y = z = 0$ ,  $x + y + z = 1$ .

चतुष्फलक  $x = y = z = 0$ ,  $x + y + z = 1$  पर  $\vec{F} = xy\hat{i} + z^2\hat{j} + 2yz\hat{k}$  के लिए अपसरण प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

OR

Evaluate  $\int_S \text{curl } \vec{F} \cdot \hat{n} ds$ , where  $\vec{F} = (y^2 + z^2 - x^2)\hat{i} + (z^2 + x^2 - y^2)\hat{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\hat{k}$  and  $S$  is the portion of the surface  $x^2 + y^2 - 29x + 9z = 0$  above the plane  $z = 0$ , and verify the Stoke's theorem.

$\int_S \text{curl } \vec{F} \cdot \hat{n} ds$  का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ  $\vec{F} = (y^2 + z^2 - x^2)\hat{i} + (z^2 + x^2 - y^2)\hat{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\hat{k}$  है तथा  $S$ ,  $z = 0$  तल के उपर फलक  $x^2 + y^2 - 29x + 9z = 0$  का भाग है तथा स्टाक प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

## UNIT II

15. Trace the conic  $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$ . Also find the focus, eccentricity and length of latus rectum.

शाकव  $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$  का अनुरेखण कीजिए। इसके नाभि, उत्केन्द्रता तथा नायिलम्ब की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

OR

Prove that the equation of the director circle of the conic  $l/r = 1 + e \cos\theta$  is  $r^2(1 - e^2) + 2ler \cos\theta - 2l^2 = 0$ .

सिद्ध करो कि शाकव  $l/r = 1 + e \cos\theta$  के नियामक वृत्त का समीकरण  $r^2(1 - e^2) + 2ler \cos\theta - 2l^2 = 0$  होगा।

## UNIT III

16. (a) Prove that the semi-vertical angle of a right circular cone admitting sets of three mutually perpendicular generators is  $\tan^{-1}\sqrt{2}$

यदि एक लम्ब वृतीय शंकु के तीन जनक परस्पर लम्ब हैं, तो सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण का मान  $\tan^{-1}\sqrt{2}$  है।

(b) Show that the equation  $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$  represents a cone with vertex  $(-1, -2, -3)$ .

सिद्ध कीजिए कि समीकरण  $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$  एक शंकु को निरूपित करता है जिसका शीर्ष  $(-1, -2, -3)$  है।

OR

(a) Find the equation of the enveloping cylinder of the surface  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  and whose generators are parallel to the line  $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ .

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  के अन्वालोपी बेलन के समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखाएँ  $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$  के समान्तर हैं।

(b) Find the equation of the right circular cylinder whose guiding circle is  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3$ .  
उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशांक वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3$  हैं।

**The End**

SOPHIA GIRLS COLLEGE, AJMER



# Sophia Girls' College, Ajmer

(Autonomous)

Semester II – 2017- 18

End Semester Examination

Class : B.Sc. [Maths]

Sub : Mathematics

Paper II : [MAT-202]:Calculus

M.M: 70 Marks

Time : 2 ½ Hrs.

Instruction : In case of any doubt, the English version of paper stands correct.

## Section A

[10 Marks]

Section A contains 10 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt all 10 questions. Each question is of one mark.

### I. Answer the following questions

1. Find the radius of curvature if the pedal equation of the ellipsoid is:

वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए यदि दीर्घवृत्त का पदिक समीकरण है :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{a}{b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2}$$

2. Define derivative of the length of arc.

चाप की लम्बाई के अवकलज की परिभाषा दीजिए

3. Write the Euler's theorem for homogenous functions.

समघात फलन के लिये ऑयलर प्रमेय लिखिए

4. Define evaluate.

केन्द्रज की परिभाषा लिखिए

5. Give the sufficient condition for  $f(a, b)$  to be a maximum value of  $f(x, y)$ .

फलन  $f(x, y)$  के अधिकतम मान  $f(a, b)$  होने की पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए

6. Evaluate the following  $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x dx$ .

निम्न का मान ज्ञा कीजिए

7. Define Beta function.

बीटा फलन की परिभाषा दीजिए

8. Change the order of integration in the following double integral.

निम्न द्वि-समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिए:

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

9. Write down the relation between Beta and Gamma function.

बीटा तथा गामा फलन से संबंध लिखिए

10. Find the points of inflection of the curve:

वक्र के नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए:

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

**Section B****[15 Marks]**

Section B contains 6 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt 3 questions, at least 1 from each unit. Each question is of 5 marks.

**II. Answer the following questions****UNIT I**

11. Find the pedal equation of the asteroid.  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$   
एस्ट्रायड  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए

**OR**

Find the asymptotes of the following curve:

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए

$$y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$$

**UNIT II**

12. If  $x^x y^y z^z = c$  then show that  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$ .

यदि  $x^x y^y z^z = c$  तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$

**OR**

Find the envelope of the circles which passes through the vertex of the parabola  $y^2 = 4ax$  and whose centre lies on it.

एक वृत्त का केन्द्र सदैव परवलय  $y^2 = 4ax$  पर रहता है तथा यह परवलय के शीर्ष से गुजरता है वृत्त कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए

**UNIT III**

13. To show that: प्रदर्शित कीजिए

$$\sqrt{n} \sqrt{1-n} = \frac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1.$$

**OR**

Change the order of integration in the following double integral:

निम्न द्वि-समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिए

$$\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} f(x, y) dx dy.$$

**Section C****[45 Marks]**

Section C – contains 6 questions. Answer any three questions (400 words each), selecting one from each unit. Each question is of 15 marks.

**III. Answer the following questions.**

**UNIT I**

14. Trace the following curve:

निम्न वर्क का अनुरखण कीजिए

$$y^2(a + x) = x^2(3a - x)$$

**OR**

a. Prove that the radius of curvature of the centenary

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \text{ at } (x, y) \text{ is } \frac{y^2}{c}.$$

सिद्ध करो कि कैटेनरी  $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$  के बिन्दु  $(x, y)$  पर वक्रता त्रिज्या  $\frac{y^2}{c}$  है

b. Find the point inflection of the curve  $y(a^2 + x^2) = x^3$

वक्र  $y(a^2 + x^2) = x^3$  के नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए

**UNIT II**

15. (a) If  $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}\right)$ , then prove that.

यदि  $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}\right)$  तो सिद्ध कीजिए

$$x^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + 2xy \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} + y^2 \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \sin 2u (1 - 4 \sin^2 u)$$

(b) If  $x^3 + y^3 = 3axy$ , then find  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

यदि  $x^3 + y^3 = 3axy$  ज्ञात कीजिए  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

**OR**

(a) Find the envelope of the straight lines  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha$ ;  $\alpha$  is a parameter.

$\alpha$  को प्राचलक लेते हुए सरल रेखाओ  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha$ ; का अन्वलोप ज्ञात कीजिये

(b) Find the maximum value of  $x^3 y^2 (1 - x - y)$ .

उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए

**UNIT III**

16. (a) Show that :- प्रदर्शित कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \tan^m x dx = \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

(b) Prove that:- सिद्ध कीजिए कि

$$2^{2n-1} B(n, m) = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)}}$$

**OR**

(a) Evaluate:- मान ज्ञत कीजिए  $\int \int_R (x + y)^2 dx dy$ . Where the area R is bounded by ellipse जहाँ क्षेत्र दीर्घवृत्त से परिबद्ध है

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(b) Evaluate:  $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx dx dz}{(x+y+z+1)^3}$

**The End**

SOPHIA GIRLS COLLEGE, AJMER

# Sophia Girls' College, Ajmer

(Autonomous)

Semester II – 2018- 19

End Semester Examination

Class : B.Sc. Math

Sub : Mathematics

Paper I : [MAT 201]: Vector Calculus & Geometry

Time : 2 ½ Hrs.

M.M: 70 Marks

Instruction : In case of any doubt, the *English* version of paper stands *correct*.

## Section A

[10 Marks]

*Section A contains 10 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt all 10 questions. Each question is of one mark.*

### I. Answer the following.

1. Prove that:

सिद्ध करें।  $\text{grad } r = \hat{r}$ , when  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

2. Find the greatest rate of increase of  $\phi = 2xyz^2$  at  $(1,0,-3)$ .

$\phi = 2xyz^2$  का  $(1,0,-3)$  पर वृद्धि की अधिकतम दर ज्ञात करो।

3. State Gauss divergence theorem.

गॉस अपसरण प्रमेय का कथन लिखिए।

4. Write the condition for conic  $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$  to represent an equation of hyperbola.

शांकव  $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$  के एक अतिपरवलय को प्रदर्शित करने की शर्त लिखिए।

5. Write the equation of directive of conic  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$ , when  $e < 1$ .

शांकव  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$ , जबकि  $e < 1$  की नियता का समीकरण लिखिए।

6. Define Auxiliary circle of a conic.

शांकव के सहायक वृत्त को परिभाषित कीजिए।

7. Write the condition of tangency of a plane and sphere.

एक समतल एवं गोले का स्पर्शिता प्रतिबन्ध लिखिए।

8. Write the condition of orthogonality of two spheres.

दो गोलों के परस्पर लाम्बिक प्रतिच्छेदन का प्रतिबन्ध लिखिए।

9. Define enveloping cone.

अन्वालोपी शंकु को परिभाषित कीजिए।

10. Define right circular cylinder.

लम्बवृत्तीय बेलन को परिभाषित कीजिए।

## Section B

[15 Marks]

*Section B contains 6 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt 3 questions, at least 1 from each unit. Each question is of 5 marks.*

### II. Answer the following.

## UNIT I

11. Find  $\nabla^2 r^n$  and show that  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0$  where  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$\nabla^2 r^n$  का मान ज्ञात करो तथा सिद्ध करें  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0$ , जहाँ  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

OR

Evaluate  $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ , where  $\vec{f} = xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j}$  and C is the rectangle in the xy plane bounded by lines  $x = 1, x = 4, y = 2, y = 10$ .

$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$  का मान ज्ञात कीजिए, जबकि  $\vec{f} = xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j}$  व C, xy पटल में  $x = 1, x = 4, y = 2, y = 10$  रेखाओं से घिरा आयत है।

## UNIT II

12. Find the lengths and the equation of the axes of the conic  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$ .

शांकव  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$  के अक्षों की लम्बाइयाँ व समीकरण ज्ञात कीजिए।

OR

A chord PQ of a conic subtends a right angle at focus S. If e be the eccentricity, l be the semi-latus rectum, prove that

एक शांकव की जीवा PQ नाभि S पर समकोण अन्तरित करती है। यदि शांकव की उत्केन्द्रता e अर्द्धनाभिलम्ब l हो तो सिद्ध करें—

$$\left( \frac{1}{sp} - \frac{1}{l} \right)^2 + \left( \frac{1}{SQ} - \frac{1}{l} \right)^2 = \frac{e^2}{l^2}$$

## UNIT III

13. Find the equation of the sphere having the circle  $x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z = 8, x + y + z = 3$  as a great circle.

उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जिसका वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z = 8, x + y + z = 3$  तक वृहत् वृत्त हों।

OR

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  and passing through the curve  $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$ .

उस बेलन का समीकरण ज्ञात करें जिसकी जनक रेखाएँ  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  के समानान्तर हैं तथा जिसका निर्देशक वक्र  $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$  हैं।

Section C

[45 Marks]

Section C – contains 6 questions. Answer any three questions (400 words each), selecting one from each unit. Each question is of 15 marks.

III. Answer the following.

## UNIT I

14. Prove that :

सिद्ध करो—

$$\text{curl } \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{a}}{r^3} + \frac{3\vec{r}}{r^5} (\vec{a} \cdot \vec{r})$$

Where,  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ,  $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$  is a constant vector and  $|\hat{r}| = r$ .  
जहाँ  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ,  $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$  एक अचर संदिश है तथा  $|\hat{r}| = r$

OR

Verify Gauss' Divergence theorem for  $f = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ , taken over the region bounded by  $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3$ .

$x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3$  द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर फलन  $f = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$  के लिए गॉस अपसरण प्रमेय सत्यापित कीजिए।

## UNIT II

15. Trace the curve.

वक्र अनुरेखण कीजिए।

$$x^2 + xy + y^2 + x + y = 1$$

OR

Find the condition that the straight line  $\frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$  touches the circle  $r = 2a \cos\theta$ .

वह प्रतिबन्ध ज्ञात करो जबकि सरल रेखा  $\frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$ , वृत्त  $r = 2a \cos\theta$  को स्पर्श करें।

## UNIT III

16. Find the equation of cone whose vertex is (5,4,3) and the guiding curve is  $3x^2 + 2y^2 = 6, y + z = 0$ .

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (5,4,3) तथा निर्देशक वक्र  $3x^2 + 2y^2 = 6, y + z = 0$  हैं।

OR

Find the equation of the right circular cylinder whose guiding circle is  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3$ .

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात करो जिसका निर्देशक वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3$  हैं।

**The End**

# Sophia Girls' College, Ajmer

(Autonomous)

Semester II – 2018- 19

End Semester Examination

Class : B.Sc. [Maths]

Sub : Mathematics

Paper II : [MAT-202]:Calculus

Time : 2 ½ Hrs.

M.M: 70 Marks

Instruction : In case of any doubt, the English version of paper stands correct.

## Section A

[10 Marks]

Section A contains 10 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt all 10 questions. Each question is of one mark.

### I. Answer the following.

1. Define an asymptote.  
अनन्त स्पर्शी को परिभाषित कीजिए ।
2. Write the necessary condition for the existence of double point for the curve  $f(x, y) = 0$  and also the condition for the double point to be a node, cusp or conjugate point.  
वक्र  $f(x, y) = 0$  के द्विक बिन्दुओं के अस्तित्व के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए एवं द्विक बिन्दु के नोड, उभयाग्र या संयुग्मी बिन्दु होने हेतु प्रतिबंध भी लिखिए ।
3. Find the radius of curvature at the point  $(s, \varphi)$  for the curve  $s = a \log(\sec \varphi + \tan \varphi)$ .  
वक्र  $s = a \log(\sec \varphi + \tan \varphi)$  के बिन्दु  $(s, \varphi)$  पर वक्रता त्रिज्या ज्ञान कीजिए ।
4. State Euler's theorem for homogeneous functions.  
समघान फलनों के लिए आयकर प्रमेय का कथन लिखिए ।
5. If  $u = \frac{y^2}{2x}$ ,  $v = \frac{x^2+y^2}{2x}$ , find  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ .  
यदि  $u = \frac{y^2}{2x}$ ,  $v = \frac{x^2+y^2}{2x}$  तो  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  ज्ञात कीजिए ।
6. Define envelope of a one parameter family of plane curves.  
एक प्राचल वाले समतल वक्र कुल के अन्वालोप को परिभाषित कीजिए ।
7. Evaluate  $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$   
मान ज्ञात कीजिए  $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$
8. Change the order of integration in the following integral  
निम्न समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिए ।  
$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dx dy$$
9. State Liouville's extension of Dirichlet's integral.  
डिरचलिट समाकल के लिवेली व्यापकीकरण का कथन लिखिए ।
10. Check if the function  $x^3 - 4xy + 2y^2$  attains its extreme value at the point  $(0, 0)$ .  
जाँच कीजिए कि क्या फलन  $x^3 - 4xy + 2y^2$  अपने चरम मान को बिन्दु  $(0, 0)$  पर प्राप्त करता है ।

## Section B

[15 Marks]



Section B contains 6 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt 3 questions, at least 1 from each unit. Each question is of 5 marks.

**II. Answer the following.**

**UNIT I**

11. Find  $\frac{ds}{do}$  for the curve  $\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$ .

वक्र  $\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$  के लिए  $\frac{ds}{do}$  ज्ञात कीजिए ।

**OR**

Find the radius of curvature at the point  $(r, \theta)$  on the polar curve  $r(1 + \cos \theta) = a$   
ध्रुवी वक्र  $r(1 + \cos \theta) = a$  के बिन्दु  $(r, \theta)$  पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

**UNIT II**

12. If  $u = \sec^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x + y} \right)$ , then prove that  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \cot u$ .

यदि  $u = \sec^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x + y} \right)$  तो सिद्ध कीजिए  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \cot u$

**OR**

If  $u^3 + v^3 = x + y$  and  $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ , then find the value of  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ .

यदि  $u^3 + v^3 = x + y$  तथा  $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$  तो  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  का मान ज्ञात कीजिए ।

**UNIT III**

13. Prove that. सिद्ध कीजिए  $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{4a\sqrt{(2\pi)}}$

**OR**

Evaluate  $\iint_R xy(x + y) dx dy$  where the area of integration  $R$  is the area between  $y = x^2$  and  $y = x$ .

$\iint_R xy(x + y) dx dy$  का मान ज्ञात कीजिए जहाँ समाकलन का क्षेत्र  $R$ ,  $y = x^2$  तथा  $y = x$  के मध्य का क्षेत्र है ।

Section C – contains 6 questions. Answer any three questions (400 words each), selecting one from each unit. Each question is of 15 marks.

### III. Answer the following.

#### UNIT I

14. Trace the following curves.

निम्न वक्रों का अनुरेखण कीजिए ।

a.  $y^2(2a - x) = x^3$

b.  $r = a(1 + \cos \theta)$

OR

Find all the asymptotes of the curve  $(2x - 3y + 1)^2(x + y) - 8x + 2y - 9 = 0$  and show that they intersect the curve again in three points which lie on a straight line. Find the equation of this line.

वक्र  $(2x - 3y + 1)^2(x + y) - 8x + 2y - 9 = 0$  की सभी अनन्त स्पर्शियों ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि ये वक्र को पुनः तीन बिन्दुओं पर काटती है जो एक रेखा पर स्थित है । इस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

#### UNIT II

15. (a) Prove Euler's theorem on homogeneous function.

समघात फलनों के लिए आयलर प्रमेय को सिद्ध करें ।

(b) Prove that  $u = ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$  is maximum at  $(\frac{a}{2}, \frac{a}{3})$

सिद्ध कीजिए कि  $u = ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$  उच्चतम मान बिन्दु  $(\frac{a}{2}, \frac{a}{3})$  पर है ।

OR

Find the envelope of the family of straight lines  $ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$ ,  $\alpha$  being the parameter. Use the above result to show that the evolutes of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  is  $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ .

सरल रेखा कुल  $ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$  का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जहाँ  $\alpha$  प्राचल है उक्त परिणाम के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  का केन्द्र  $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$  है ।

#### UNIT III

16. (a) Prove that:

सिद्ध कीजिए

$$b(m, n) = \frac{\sqrt{(m)}\sqrt{(n)}}{\sqrt{(m+n)}} \quad (m > 0, n > 0)$$

(b) Evaluate  $\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$  where region of integration is the complete ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

$\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$  का मान कीजिए जहाँ समाकलन का क्षेत्र संपूर्ण दीर्घवृत्तज  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  है।

**OR**

a. Evaluate the following integral by changing the order of integration.

निम्न समाकल में समाकलन का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_{y=0}^1 \int_y^1 x^2 \cos(x^2 - xy) \, dy \, dx$$

b. Evaluate  $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$  where region of integration is a cylinder  $V$  bounded by  $z=0$ ,  $z=1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ .

$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$  का मान ज्ञात कीजिए जहाँ समाकलन क्षेत्र एक बेलन  $V$  है जो  $z=0$ ,  $z=1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  द्वारा परिबद्ध है।

**The End**

**Sophia Girls' College (Autonomous)**  
**Ajmer**

**Semester II – 2021-22**  
**End Semester Examination**  
**Class : B.Sc. Math**  
**Sub : Mathematics**

**Paper I : [MAT-201]: Vector Calculus and Geometry**  
**Time : 1 ½ Hrs.**

**M.M: 40 Marks**

**Instruction : In case of any doubt, the English version of paper stands correct.**

**Section A**

**[12 Marks]**

*Section A contains 12 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt any 6 questions.  
Each question is of 2 marks.*

**I. Answer the following questions.**

1. If  $\vec{a} = 5t^2\hat{i} - \cos t\hat{j}$  and  $\vec{b} = t\hat{i} + \sin t\hat{j}$  then find  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$   
यदि  $\vec{a} = 5t^2\hat{i} - \cos t\hat{j}$  तथा  $\vec{b} = t\hat{i} + \sin t\hat{j}$  तब  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  ज्ञात कीजिए
2. Define Curl of a vector point function.  
सदिश बिन्दु फलन का कुन्तल परिभाषित कीजिए।
3. State Gauss's divergence theorem  
गॉस का अपसरण प्रमेय लिखिए।
4. If  $\vec{F} = x^2y\hat{i} + xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$  then find  $\text{div curl } F$   
यदी  $\vec{F} = x^2y\hat{i} + xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$  तो  $\text{div curl } F$  ज्ञात करो
5. Write asymptotes of  $ax^2 + 2bxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$   
 $ax^2 + 2bxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  की अनन्तस्पर्शीयाँ लिखिए
6. Write equation of circle in polar form when pole is on circle  
वृत्त का समीकरण ध्रुवीय रूप में लिखो जब ध्रुव वृत्त पर हो।
7. Define auxiliary circle and write its equation in polar form.  
स्हायक वृत्त को परिभाषित कीजिए तथा इसका समीकरण ध्रुवीय रूप में लिखिए।
8. Name the conic represented by  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$   
स्मीकरण  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$  में प्रस्तुत शाकंवा का नाम बताइए।
9. Find Radius of sphere  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$   
गोले  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$  की त्रिज्या ज्ञात करो।
10. Write equation of tangent plane at  $(\alpha, \beta, \gamma)$  of sphere  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$   
गोले  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$  का बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  पर स्पर्श समान्ता लिखिए
11. Write equation of right circular cone.  
लम्बवृतीय शंकु का समीकरण लिखिए।
12. Define enveloping cylinder.  
अन्वालोपी बेलन को परिभाषित कीजिए।

**Section B**

**[10 Marks]**

*Section B contains 6 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt any 2 questions from different units. Each question is of 5 marks.*

**II. Answer the following questions.**

**UNIT I**

13. Find the directional derivative of  $f = xy + yz + zx$  in the direction of the vector  $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  at the point  $(1, 2, 0)$

बिन्दु  $(1, 2, 0)$  पर  $f = xy + yz + zx$  का  $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  की दिशा में दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए।

**OR**

Find  $\text{div } V$  and  $\text{curl } V$  if  $V = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

यदि  $V = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$  है तो  $\text{div } V$  तथा  $\text{curl } V$  ज्ञात कीजिए।

### UNIT II

14. Find lengths and equations of axes of the following conic  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$   
निम्न शांकव की अक्षों के समीकरण तथा लम्बायों ज्ञात करो।  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$

**OR**

Show that the following equations represent the same conic:

सिद्ध कीजिए की निम्न समीकरण एक ही शांकव को निरूपित करते हैं।

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \text{and} \quad \frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$$

### UNIT III

15. Find equations to the tangent planes to the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  which passes through the lines  $x + y = 5$ ;  $x - 2z = 7$

गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  की उन दो स्पर्श समको के समीकरण ज्ञात करो जो रेखाओं  $x + y = 5$ ;  $x - 2z = 7$  से गुज़रे।

**OR**

Find equation of enveloping cone of the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2 = 0$  with its vertex at  $(1, 1, 1)$

गोले  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2 = 0$  के उस अन्वालोप शांकु का समीकरण करो जिसका शीर्ष बिन्दु  $(1, 1, 1)$  है।

### Section C

[18 Marks]

*Section C contains 6 questions (400 words each) and a candidate is required to attempt any 2 questions from different units. Each question is of 9 marks.*

### III. Answer the following questions.

#### UNIT I

16. Verify Stokes theorem for the function  $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$  integrated round the square in the plane  $z = 0$ , whose sides are along the lines  $x = y = 0$  and  $x = y = a$

फलन  $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$  के लिए स्टोक प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहा का समाकलन तथा  $z = 0$  में स्थित वर्ग के चारों ओर किया गया है: जिसकी भुजाएं रेखा  $x = y = 0$  तथा  $x = y = a$  के अनुदिश है।

**OR**

If  $\vec{r} = t\hat{i} - t^2\hat{j} + (t - 1)\hat{k}$  and  $\vec{s} = 2t^2\hat{i} + 6t\hat{k}$  then find value of

यदि  $\vec{r} = t\hat{i} - t^2\hat{j} + (t - 1)\hat{k}$  तथा  $\vec{s} = 2t^2\hat{i} + 6t\hat{k}$  तो ज्ञात कीजिए।

a.  $\int_0^2 (r \cdot s) dt$

b.  $\int_0^2 (r \times s) dt$

#### UNIT II

17. Trace the curve

वक्र का अनुरेखण कीजिए।

$$x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$$

**OR**

A circle passing through the focus of a conic whose latus rectum is  $2l$  meet the conic in four points whose distance from the focus are  $r_1, r_2, r_3$  and  $r_4$  respectively, prove that  
 एक वृत्त किसी शांकव से गुजरता है जिसकी नाभिलम्ब  $2l$  है, तथा शांकव को चार बिन्दुओं पर मिलता है जिनकी नाभि से लम्बाइयाँ क्रमशः  $r_1, r_2, r_3$  और  $r_4$  हैं, तो सिद्ध कीजिए की

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}$$

### UNIT III

18. Find the equation of right circular cylinder where guiding curve is the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - 2y + 2z = 3$

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात करो जिसका निदेशक वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - 2y + 2z = 3$  है।

OR

Find co-ordinates of centre and radius of the circle

निम्न वृत्त का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात करो।

$$x^2 + y^2 - 2y - 4z = 20, x + 2y + 2z = 21$$

--The End--

SOPHIA GIRLS COLLEGE, AJMER

**Sophia Girls' College (Autonomous)**  
**Ajmer**

Semester – 2021-22

End Semester Examination (May 2022)

Class : B.Sc. [Maths]

Sub : Mathematics

Paper II : [MAT-202]: Advanced Calculus

Time : 1 ½ Hrs.

M.M: 40 Marks

Instruction : In case of any doubt, the *English* version of paper stands correct.

**Section A**

[12 Marks]

*Section A contains 12 questions (20 words each) and a candidate is required to attempt any 6 questions.  
Each question is of 2 marks.*

**I. Answer the following questions.**

1. Write the formula to find the derivative of an arc for the polar curve  $r = f(\theta)$   
चाप की लम्बाई का अवकलज ज्ञात करने का सूत्र ध्रुवीय वक्र  $r = f(\theta)$  के लिए लिखिए।
2. Define parallel and oblique asymptotes.  
समान्तर एवं तिर्यक अनन्तस्पर्शियों की परिभाषा दो।
3. Write the formula for radius of curvature of Cartesian curves.  
कार्तीय वक्रों के लिए वक्रता त्रिज्या का सूत्र लिखिए।
4. Define single and double cusps.  
एकल एवं द्विक उभयाण्त की परिभाषा दीजिए।
5. Verify the theorem  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ , when  $u = x^3 + y^3 + 3axy$   
प्रमेय  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$  की पुष्टि कीजिए जबकि  $u = x^3 + y^3 + 3axy$
6. Write the formula for finding second differential coefficient of implicit functions.  
अस्पष्ट फलनों के द्वितीय अवकल गुणांक ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।
7. Define envelope.  
अन्वालोप की परिभाषा दीजिए।
8. Give criteria for extreme value of  $f(x, y)$ .  
फलन  $f(x, y)$  के चरम मान की कसौटी दीजिए।
9. What is Legendre's duplication formula?  
लिजेन्डर द्विगुणन सूत्र क्या है?
10. State Dirichlet's theorem for triple integral.  
त्रि समाकलन के लिए डिरिचलेट्स प्रमेय का कथन लिखिए।
11. Write polar form of the following:  
निम्न का ध्रुवीय रूप लिखिए।  
$$\iint f(x, y) dx dy$$
12. Change the order of integration in the following integral:  
निम्नलिखित समाकल में समाकलन का क्रम बदलिए।  
$$\int_0^a \int_0^x f(x, y) dx dy$$

**Section B**

[10 Marks]

Section B contains 6 questions (50 words each) and a candidate is required to attempt any 2 questions from different units. Each question is of 5 marks.

**II. Answer the following questions.**

**UNIT I**

13. For the curve  $r^m = a^m \cos m\theta$ , prove that  $\frac{ds}{d\theta} = a(\sec m\theta)^{\frac{m-1}{m}}$   
 वक्र  $r^m = a^m \cos m\theta$  के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{ds}{d\theta} = a(\sec m\theta)^{\frac{m-1}{m}}$$

**OR**

Find the asymptotes of the following curve:

निम्न वक्र के अनन्तस्पर्शियों ज्ञात कीजिए।

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

**UNIT II**

14. If  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3+y^3}{x-y} \right)$ , then prove that  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

यदि  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3+y^3}{x-y} \right)$  तब  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$  सिद्ध कीजिए।

**OR**

Find the envelope of the family of ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ when } a + b = c, \text{ c being a constant.}$$

दीर्घवृत्तों  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के कुल का अन्वालोप ज्ञात जबकि  $a + b = c$  जहाँ  $c$  अचर है।

**UNIT III**

15. Evaluate ज्ञात कीजिए

$$\int_0^1 x^{n-1} \left( \log \frac{1}{x} \right)^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m)}{n^m}; m, n > 0$$

**OR**

Evaluate मान ज्ञात कीजिए

$$\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$$

where the region of integration is the volume of the ellipsoid in the positive octant.

जहाँ समाकलन का क्षेत्र धनात्मक अष्टांशक में दीर्घवृत्तज है।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

**Section C**

**[18 Marks]**

Section C contains 6 questions (400 words each) and a candidate is required to attempt any 2 questions from different units. Each question is of 9 marks.

**III. Answer the following questions.**

**UNIT I**

16. Trace the following curve

निम्नलिखित वक्र का अनुरेखण कीजिए।

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$



OR

Show that the radius of curvature at a point  $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$  on the curve  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  is  $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$

सिद्ध कीजिए वक्रता त्रिज्या बिन्दु  $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ , पर वक्र  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  की  $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$  है।

### UNIT II

17. If  $u = x \sin^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$  then prove that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

यदि  $u = x \sin^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$  तब सिद्ध कीजिए।

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

OR

Find the maxima and minima of  $u = x^2 + y^2 + z^2$  subject to the conditions  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  and  $lx + my + nz = 0$

प्रतिबन्धो  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  तथा  $lx + my + nz = 0$  के अन्तर्गत  $u = x^2 + y^2 + z^2$  के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

### UNIT III

18. Evaluate the following integral by changing the order:

निम्न समाकल का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

OR

Evaluate the following integral by changing to polar coordinates:

निम्न समाकल को ध्रुवीय निर्देशांकमें परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

--The End--